Fiche de cours: Théorèmes principaux d'intégration

Dans cette fiche de cours λ dénotera la **mesure de Lebesgue** bien que les théorèmes énoncés s'appliquent à d'autres espaces mesurés.

1 Théorèmes d'interversion de la limite et de l'intégrale

Les deux principaux Théorèmes d'interversion limite-intégrale sont les suivants.

1.1 Théorème de la convergence monotone

Théorème 1.1. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions telles que pour tout $n \geq 1,\ f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable et positive. Si pour tout $x \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^* :\ f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ alors*

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \int_E f_n d\lambda = \int_E \lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n d\lambda. \tag{1.1}$$

Notons qu'il n'est pas nécessaire que f_n soit intégrable. Il n'est donc pas exclu que (1.1) vale $+\infty$.

1.1.1 Exemple simple

Exemple 1.2. *Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}\mathbb{1}_{[1,2]}(x)$. Calculer $\int_1^2 f_n(x)dx$ n'est pas immédiat. Cependant on peut remarquer que à x fixé $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. En effet:*

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x^n}{1+x^n} &= \frac{x^{n+1}(1+x^n) - x^n(1+x^{n+1})}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} \\ &= \frac{x^{n+1} - x^n}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\end{aligned}$$

Le signe de cette expression est determiné par le numérateur. Or pour $x \in [1,2]\ :\ \ x^{n+1} \geq x^n$. Par continuité la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 1}$ est mesurable. Le théorème de Beppo-Lévy nous permet dès lors de calculer immédiatement la valeur de $\int_1^2 f_n(x)dx$ à la limite. En effet pour tout $x \in [1,2]$

$$\begin{aligned}f_n(x) &= \frac{x^n}{1+x^n} \\ &\underset{+\infty}{\sim} \frac{x^n}{x^n} = 1.\end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_1^2 f_n(x)dx &\overset{CVM}{=} \int_1^2 \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)dx\\
&= \int_1^2 1dx = 1.
\end{aligned}$$

1.1.2 Application à l'inversion somme-intégrale

Une conséquence dirrecte du Théorème est le résultat suivant

Théorème 1.3. *Pour toute suite de fonctions positives mesurables $(f_n)_{n\geq 1}$ on a*

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

En effet, on définit pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ $S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$. Puisque pour tout $x \in E$ et pour tout $n \geq 1$ $f_n(x)$ est positive on a que $(S_N)_{N\geq 1}$ est positive. On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx &= \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_E f_n(x)dx\\
&= \lim_{N\longrightarrow\infty}\int_E \sum_{n=1}^{N} f_n(x)dx\\
&\overset{\text{CVM}}{=} \int_E \lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{n=1}^{N} f_n(x)dx\\
&= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx.
\end{aligned}$$

1.2 Théorème de la convergence dominée

Théorème 1.4. *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ suite de fonctions intégrables, définies sur E et à valeurs réelles, qui converge λ-presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose de plus qu'il existe une fonction mesurable g vérifiant $|f_n(x)| \leq g(x)$ pour λ-presque tout $x \in E$. Alors f est intégrable et*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_E f_n d\lambda = \int_E \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\lambda. \tag{1.2}$$

Contrairement au théorème précédent, le théorème de la convergence dominée indique que (1.2) est finie, au prix de l'hypothèse que la suite est "dominée".

1.2.1 Exemple pour lequel on peut appliquer les deux Théorèmes

Exemple 1.5. *Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{x^{1/2n}}\mathbb{1}_{]0,1[}$. Il n'est pas dur de voir que pour tout $x \in]0,1[$ $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante. En* *particulier* $f_n(x) \leq \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *qui est bien sûr intégrable sur* $[0,1]$. *Par conséquent on peut appliquer l'un ou l'autre des théorèmes et on obtient*

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2n}} dx &\overset{\textit{Th}}{=} \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^{1/2n}} dx \\ &= \int_0^1 1 dx = 1.\end{aligned}$$

1.2.2 Exemple pour lequel seul le Théorème de la convergence monotone fonctionne

Exemple 1.6. *Considérons la suite de fonctions* $(f_n)_{n \geq 1}$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \mathbb{1}_{]0,1[}$. *Il est alors impossible de trouver une fonction* g *intégrable sur* $]0,1[$ *vérifiant pour tout* n $|f_n(x)| \leq g(x)$. *En effet pour tout* x *suffisament proche de* 0 *(disons* $x \in]0, \epsilon[$*) il existe* n_ϵ *tel que* $f_{n_\epsilon}(x) = n_\epsilon$. *Cette valeur de* n_ϵ *augmente à mesure que* ϵ *décroit et on peut prendre* ϵ *aussi petit qu'on veut. Ainsi peu importe la valeur de* $g(x)$, *on aura toujours pour* ϵ *suffisament petit:* $f_{n_\epsilon}(x) = n_\epsilon \geq g(x)$. *En revanche, il est aisé de voir que pour tout* x *fixé* $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. *Par conséquent on peut appliquer le Théorème de convergence monotone et:*

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \min\left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx &\overset{\textit{CVM}}{=} \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(n, \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.\end{aligned}$$

1.2.3 Exemple pour lequel seul le Théorème de la convergence dominée fonctionne

Exemple 1.7. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n \geq 1}$ *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $f_n(x) = \frac{(-x)^n}{n} \mathbb{1}_{]0,1[}$. *Il est clair que* f_n *n'est ni croissante ni décroissante. Cependant pour tout* $x \in]0,1[$*:* $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ *qui est intégrable sur* $]0,1[$. *Par conséquent:*

$$\begin{aligned}\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{(-x)^n}{n} dx &\overset{\textit{CVD}}{=} \int_0^1 \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{(-x)^n}{n} dx \\ &= \int_0^1 0 dx = 0.\end{aligned}$$

2 Théorème sur les intégrales paramétrées

Les deux théorèmes de cette section peuvent être immédiatement déduits du Théorème de convergence dominée. En effet on s'intéresse à la continuité et la dérivabilité de fonctions définies comme des intégrales par rapport à l'une des variables de fonctions à deux variables. La continuité et la dérivabilité étant définies à l'aide de limites, ces problèmes revienent donc à intervertir limite et intégrale.

2.1 Théorème de continuité sous le signe intégrale

Théorème 2.1. *Soit* $f : E \times I \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, où* $I \subset \mathbb{R}$ *est un intervalle. On suppose que :*

- *pour tout* $t \in I$, *la fonction* $x \mapsto f(x,t)$ *est* λ*-intégrable ;*

- *pour presque tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;*
- *il existe une fonction λ-intégrable g telle que pour tout $t \in I$ et presque tout $x \in X$,*

$$|f(x,t)| \leq g(x).$$

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcccc} F & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \int_E f(x,t)\,dx \end{array}$$

est continue sur I.

2.2 Théorème de dérivation sous le signe intégrale

Théorème 2.2. *Soit $f : E \times I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. On suppose que :*

- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est λ-intégrable ;*
- *pour presque tout $x \in E$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;*
- *il existe une fonction λ-intégrable g telle que pour tout $t \in I$ et presque tout $x \in E$,*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x).$$

Alors la fonction

$$\begin{array}{rcccc} F & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \int_E f(x,t)\,dx \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et sa dérivée est donnée par

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

2.3 Exemple simple

Exemple 2.3. *On considère la fonction*

$$\begin{array}{rcccc} F & : & [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & & t & \mapsto & \int_1^{+\infty} e^{-tx}\,dx. \end{array}$$

et on va chercher sa dérivée si elle existe. On vérifie les 3 hypohèses du Théorème de dérivation sous le signe intégrale.

- *Soit $t \geq 1$, alors $x \mapsto e^{-tx}$ est évidement intégrable (on peut invoquer le critère de Rieman par exemple).*
- *Pour tout $x \in [0, +\infty[$ $t \mapsto e^{-tx}$ a pour dérivée $x \mapsto -xe^{-tx}$. Cette fonction est bien sûre continue et donc la première est $\mathcal{C}^1$.*

- *Enfin l'étape qui est souvent la plus dure: montrons qu'il existe g intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que pour tout $t \geq 1$ et presque pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:* $\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq g(x)$. *Puisque $t \geq 1$ on a que $e^{tx} \geq e^x$ et donc que pour tout $x \geq 0$: $xe^{-tx} \leq xe^{-x}$.*

  On a donc par conséquent que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}F(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_1^{+\infty} e^{-tx}dx \\
&\overset{\textit{TDSSI}}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}e^{-tx}dx \\
&= -\int_1^{+\infty} xe^{-tx}dx \\
&\overset{\textit{IPP}}{=} \left[\frac{xe^{-tx}}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty}\frac{e^{-tx}}{t}dx \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{xe^{-tx}}{t}\right) - \frac{e^{-t}}{t} - \frac{1}{t}F(t) \\
&= -\frac{1}{t}\left(e^{-t} + F(t)\right).
\end{aligned}
$$

Remarque 2.4. *Une remarque importante est que continuité et dérivabilité sont des propriétés* ***locales****. Si l'on veut donc montrer que F est continue ou dérivable en $t \in \mathbb{R}$ on peut sans problème restreindre F à un compact $[a, b]$ qui contient t. Il devient alors plus facile de trouver une majoration générale pour* $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$.

3 Théorème de changement de variables

Definition 3.1. *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable. On définit sa matrice Jacobienne comme la matrice $J_f = \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i,j}$.*

Definition 3.2. *$\Phi : U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme si*

- *Φ est bijective.*
- *$\Phi \in \mathcal{C}^1(U, V)$*
- *$\Phi^{-1} \in \mathcal{C}^1(V, U)$.*

Remarque 3.3. *Si Φ est injective et $\det J_\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in U$, alors Φ est un difféomorphisme.*

Théorème 3.4. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et Φ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur V. Soit f définie sur V et intégrable. Alors*

$$\begin{aligned}\int_V f(x)dx &= \int_U f(\Phi(x))|\det J_\Phi(x)|dx \\ &= \int_{\Phi^{-1}(V)} f(\Phi(x)|\det J_\Phi(x)|dx.\end{aligned}$$

Remarque 3.5. *Une propriété importante de la Jacobienne est que*

$$J_{\Phi^{-1}} = J_\Phi^{-1}.$$

Dans les exercices où l'on veut faire un changement de variables il y aura deux cas de figure. Ou bien on va vouloir changer le domaine d'intégration V d'une intégrale car celui ci est trop complexe géométriquement. Un exemple typique est le passage en coordonnées polaires ou sphériques. Ou bien il va nous être donné une intégrale "compliquée"

$$\int_V f \circ \varphi(x)dx$$

mais qui n'est compliquée que parcequ'elle est **composée** avec une application φ qui la complexifie. L'idéal serait de pouvoir s'en débarasser et c'est précisément ce que nous permet le Théorème de changement de variables. Les difficultés de l'exercice sont les suivantes: Dans le premier cas Φ nous est donné mais on doit calculer $U \equiv \Phi^{-1}(V)$. Dans le second Φ doit être calculé en inversant φ. Il y a donc un calcul d'inverse dans tout les cas. Par étapes:

- Inverser Φ.
- Calculer la Jacobienne de Φ ou de Φ^{-1} et vérifier que Φ est injective pour montrer que c'est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme.
- Trouver $U := \Phi^{-1}(V)$.
- Conclure en calculant l'intégrale.

Une difficulté peut arriver dès lors qu'il existe $x \in U$ pour lequel $J_\Phi(x)$ n'est pas inversible. Dans ce cas Φ n'est pas un difféomorphisme et il faut se restreindre à un sous ensemble de U.

3.1 Application pas à pas du théorème

Pour simplifier le problème on ne considère que la dimension 2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction intégrable. On veut appliquer le changement de variable $\Phi : U \longrightarrow \phi(U) := V$. On suppose qu'on conaît Φ^{-1} mais pas (encore) Φ. Notons que si à l'inverse on conaissait le changement de variables Φ les étapes seraient strictement les mêmes en remplaçant le rôle de Φ et Φ^{-1}.

1. **Calculer** Φ^{-1}:

   On définit
   $$\begin{cases} u_1(x_1, x_2) & := \Phi_1^{-1}(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) & := \Phi_2^{-1}(x_1, x_2) \end{cases}$$
   et on réarange les expressions ci-dessus pour isoler les x_i. Puisque $x_1, \ldots, x_d \in U$ et que Φ est une bijection on obtient ainsi Φ^{-1}.
   $$\begin{cases} x_1(u_1, u_2) & = \Phi_1(u_1, u_2) \\ x_2(x_1, u_2) & = \Phi_2(u_1, u_2). \end{cases}$$
   Notons que u et x sont passé du rôle de variables à fonctions lors de cette opération.

2. **Calcul de la Jacobienne**

3. **Vérification que Φ est bien un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme:**

   Pour ce faire on vérifie que Φ est injective et que pour tout $(u_1, u_2) \in U$:
   $$\det\left(J_\Phi(u, v)\right) \neq 0.$$

4. **Déterminer $V := \Phi(U)$:**

   C'est l'étape la plus subtile et qui entraine souvent des erreurs. La méthodologie est la suivante.

   - Fixer $u \in \Phi_1(U)$ puis voir comment varie $v \in \Phi_2(U)$ en fonction de u.
   - Fixer $v \in \Phi_2(U)$ puis voir comment varie $u \in \Phi_1(U)$ en fonction de v.

   Ceci nous donne deux façons (qui parfois sont équivalentes dans les cas les plus simples) d'écrire V. Suivant les besoins de l'exercice on privilègera l'une ou l'autre.

5. **Conclusion:**

   On applique alors le Théorème de changement de variables.

3.2 Exemple simple

Exemple 3.6. *On considère la fonction* $f(x,y) = x + y$*, l'intégrale* $\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)dxdy$ *et le changement de variable*

$$\Phi : U = [0,1] \times [0,2] \longrightarrow V, \qquad \Phi(x,y) = \big(2x,\ 3y\big).$$

On veut appliquer ce changement de variable, résolvons l'exercice par étapes.

- *On commence par inverser* Φ.

$$\begin{cases} u &= 2x \\ v &= 3y \end{cases}$$

  ce qui implique que

$$\begin{cases} x &= u/2 \\ y &= v/3. \end{cases}$$

  Par conséquent pour tout $(u,v) \in V$ *on a* $\Phi^{-1}(u,v) = (u/2, v/2)$.

- *On détermine maintenant l'espace d'arrivée* $V := \Phi(U)$*. Si* $0 \leq x \leq 1$ *alors* $0 \leq 2x \leq 2$*. Si* $0 \leq y \leq 2$ *alors* $0 \leq 3y \leq 6$ *et donc* $\Phi(x,y) \in [0,2] \times [0,6]$*. A l'inverse il est facile de montrer que* $\Phi^{-1}(u,v) \in [0,1] \times [0,2]$ *pour tout* $(u,v) \in [0,2] \times [0,6]$ *et donc* $V = [0,2] \times [0,6]$.

- *La matrice jacobienne de* Φ *vaut*

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(2u)}{\partial u} & \dfrac{\partial(2u)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial(3v)}{\partial u} & \dfrac{\partial(3v)}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Donc

$$\det J_\Phi(u,v) = 2 \cdot 3 = 6 \neq 0.$$

  Il est aisé de montrer que Φ *est une injection de* U *vers* V*. On verifie donc au passage que* Φ *est bel et bien un difféomorphisme.*

- *On conclue l'exercice. Comme* $f \circ \Phi(x,y) = 2x + 3y$ *on a*

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^1 (x+y)dxdy &= \int_0^6 \int_0^2 (2u+3v).6dudv \\ &= \int_0^6 \int_0^2 (12u+18v)dudv \end{aligned}$$

On calcule alors l'intégrale pour conclure.

3.3 Exemple: calcul de l'aire d'une ellipse

Exemple 3.7. *On considère* $\mathcal{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1\right\}$*. Cet ensemble est une ellipse de demi-grand axe* a *et de demi-petit axe* b*. On cherche à calculer*

$$\int_{\mathcal{D}} dxdy.$$

On applique le changement de variables

$$\Phi : (r,\theta) \in U \mapsto (ar\cos\theta, br\sin\theta)$$

pour $U = \big[0,1\big] \times \big[0,2\pi\big]$.

- *On peut montrer facilement que* Φ *est une injection entre* $\mathcal{D}$ *et* U*, d'où* $\Phi(\mathcal{D}) = U$.
- *On calcule la Jacobienne de* Φ*:*

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est abr *qui est nul presque partout.* Φ *est donc bien un difféomorphisme de* U *vers* $\mathcal{D}$ *(en omettant le singleton* 0 *de* $r \in [0,1]$ *qui est de toutes façons Lebesgue-négligeable).*

Notez que l'on a remplacé l'étape d'inversion de Φ *par l'inversion de la matrice* J_Φ*. On peut à présent conclure l'exercice:*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} 1dxdy &= \int_{\Phi(U)} 1dxdy \\
&\overset{\text{CDV}}{=} \int_U 1.J_\Phi(r,\theta)drd\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 abrdrd\theta \\
&= ab\pi.
\end{aligned}$$